

محاسبه نیروی مغناطیسی بین سیم‌پیچ‌های حلزونی به روش مش‌بندی سطوح مقاطع

عباس شیری و عباس شولایی

دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران ایران

E-mail: abbas_shiri@iust.ac.ir, shoulaie@iust.ac.ir

ایران

واژه‌های کلیدی: پتانسیل مغناطیسی برداری، سیم‌پیچ حلزونی، نیروی مغناطیسی، روش مش‌بندی

چکیده

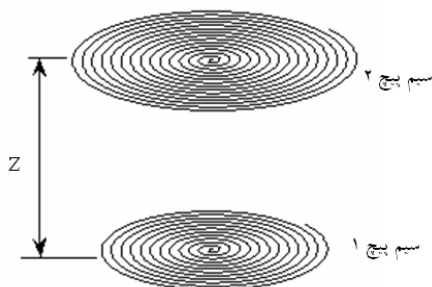
در این مقاله نیروهای مغناطیسی بین سیم‌پیچ‌های حلزونی مسطح حامل جریان با استفاده از روشی جدید محاسبه شده است. در این روش تنها با اندازه‌گیری ابعاد ظاهری سیم‌پیچ‌ها و دانستن تعداد دورشان، نیروی بین آنها قابل محاسبه می‌باشد. با توجه به اینکه محاسبه دقیق نیروی مغناطیسی بین سیم‌پیچ‌های حلزونی دارای مشکلاتی همچون پیچیدگی و زمان محاسبات می‌باشد، در روش پیشنهادی این مشکلات برطرف شده است. به طوری که مقایسه نتایج حاصل از محاسبات توسط روش مستقیم محاسبه نیرو و روش ارائه شده بیانگر کارا بودن روش دومی، هم از نظر سادگی و هم از نظر زمان محاسبات می‌باشد. برای ارزیابی میزان دقت روش ارائه شده، نتایج حاصل از محاسبات با نتایج آزمایشگاهی مقایسه و مورد تأیید قرار گرفته است.

۱- مقدمه

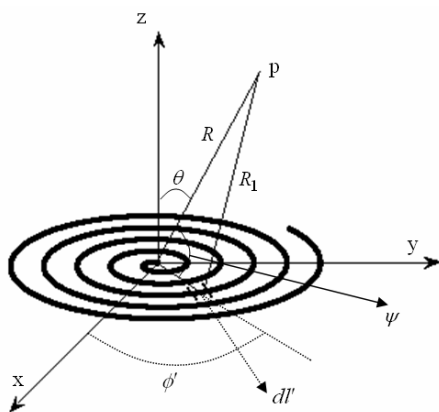
سیم‌پیچ‌های حلزونی مسطح با توجه به کاربرد وسیعی که در صنعت برق دارند، همیشه مورد توجه مهندسان و صنعت‌گران بوده‌اند. استفاده از این سیم‌پیچ‌ها در کاربردهای مختلف، مستلزم آگاهی از توزیع میدان‌های مغناطیسی در اطراف و نیروهای مغناطیسی بین آنها می‌باشد. از کاربرد مهم این سیم‌پیچ‌ها می‌توان به استفاده از آنها در مخابرات و رباتیک اشاره کرد. در اینگونه سیستم‌ها برای داشتن اندوکتانس زیاد و شکل مسطح، از سیم‌پیچ‌های حلزونی مسطح استفاده می‌شود [۱]-[۳]. این نوع سیم‌پیچ‌ها در الکترونیک قدرت و در مبدل‌های dc/dc نیز به دلیل مسطح بودن و شکل خاص‌شان استفاده زیادی دارند؛ به طوری که برای کاهش حجم مبدل، جایگزین خوبی برای سلف‌های معمولی به شمار می‌روند [۴]-[۷].

بیست و چهارمین کنفرانس بین‌المللی برق

$$A = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int \frac{[-a_x \sin \phi' + a_y \cos \phi'] r' d\phi' + [a_x \cos \phi' + a_y \sin \phi'] dr'}{R_1} \quad (2)$$



شکل ۱: دو سیم‌پیچ حلزونی در فاصله z از هم



شکل ۲: محاسبه پتانسیل مغناطیسی برداری ناشی از سیم‌پیچ حلزونی در نقطه دلخواه p

در رابطه (۲) برای محاسبه انتگرال بایستی یکی از متغیرهای انتگرال‌گیری را بر حسب متغیر دیگری بدست آوریم. رابطه بین این دو متغیر انتگرال‌گیری، رابطه‌ای خطی بوده و داریم [۱۲]:

$$\phi' = K_1 r' \quad (3)$$

در رابطه فوق K_1 ، ضریب فشردگی سیم‌پیچ بوده و به قطر سیم به کار رفته در سیم‌پیچ و ساختار آن بستگی داشته و میزان فشردگی آن را مشخص می‌کند. با بدست آوردن پتانسیل مغناطیسی برداری، می‌توان میدان مغناطیسی را با استفاده از رابطه زیر بدست آورد [۱۱]:

$$B = \nabla \times A \quad (4)$$

نیروی وارده بر سیم‌پیچ ۲ ناشی از سیم‌پیچ ۱ برابر است با [۱۱]:

سیم‌پیچ‌های حلزونی در دهه اخیر در صنایع ریخته‌گری برای شکل دهی صفحات فلزی نازک کاربردهای خوبی پیدا کرده‌اند؛ در مرجع [۸] برای محاسبه نیروی بین آنها از روش تفاضل محدود استفاده شده است؛ در مرجع [۳] نیز این نیروها فقط با آزمایش بدست آمده و هیچگونه روابط تحلیلی برای محاسبه نیرو ارائه نشده است. در کارهای دیگری از مؤلفان فوق برای محاسبه نیرو، سیم‌پیچ حلزونی با حلقه‌های هم‌مرکز جایگزین شده و نیروی حاصل از اثرات تک تک این حلقه‌ها برای محاسبه نیرو در نظر گرفته شده است [۹] [۱۰]. در این مقاله روشی جدید مبتنی بر فیلمان جریان برای محاسبه نیروهای مغناطیسی بین سیم‌پیچ‌های حلزونی ارائه می‌شود. در روش‌های معمول محاسبه نیرو بین سیم‌پیچ‌ها، اطلاع از چیدمان دورها در سیم‌پیچ امری ضروری می‌باشد [۹] ولی در روش پیشنهادی تنها اطلاع از تعداد دور و ابعاد ظاهری سیم‌پیچ‌ها برای محاسبات کافی است. برای اثبات نتایج بدست آمده از محاسبات، سیم‌پیچ‌هایی با دقت بالا ساخته شده و نتایج حاصل از اندازه‌گیری نیرو بین آنها، با نتایج محاسبات مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

۲- محاسبه نیروی مغناطیسی بین سیم‌پیچ‌های حلزونی به روش مستقیم

برای محاسبه نیروی مغناطیسی بین دو سیم‌پیچ حلزونی نشان داده شده در شکل ۱، ابتدا پتانسیل مغناطیسی برداری ناشی از یک سیم‌پیچ را در نقطه‌ای دلخواه مانند p (شکل ۲) محاسبه می‌کنیم.

پتانسیل مغناطیسی برداری ناشی از سیم‌پیچ ۱ در نقطه دلخواهی چون p از رابطه زیر به دست می‌آید [۱۱]:

$$A = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int \frac{dl'}{R_1} \quad (1)$$

که در آن I_1 ، جریان سیم‌پیچ، dl' ، جزء دیفرانسیلی طول و R_1 ، فاصله این جزء با نقطه p می‌باشد. مختصات پریم‌دار مربوط به منبع است.

با جایگذاری عبارات مناسب به جای dl' به رابطه زیر برای پتانسیل مغناطیسی برداری می‌توان دست یافت [۱۰]:

بیست و چهارمین کنفرانس بین‌المللی برق

$$F_{21} = a_x f_x + a_y f_y + a_z f_z \quad (6)$$

در رابطه فوق f_x ، f_y و f_z به ترتیب مؤلفه‌های نیرو در جهت‌های x ، y و z بوده و توسط روابط (۷) - (۹) داده می‌شوند

$$f_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1'}^{r_2'} \frac{[r \sin(K_2 r - K_1 r') - K_1 r r' \cos(K_2 r - K_1 r') + K_1 r'^2][\sin(K_2 r) + K_2 r \cos(K_2 r)]}{[(r \cos(K_2 r) - r' \cos(K_1 r'))^2 + (r \sin(K_2 r) - r' \sin(K_1 r'))^2 + z^2]^{3/2}} dr' dr \quad (7)$$

$$f_y = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1'}^{r_2'} \frac{[r \sin(K_2 r - K_1 r') - K_1 r r' \cos(K_2 r - K_1 r') + K_1 r'^2][\cos(K_2 r) + K_2 r \sin(K_2 r)]}{[(r \cos(K_2 r) - r' \cos(K_1 r'))^2 + (r \sin(K_2 r) - r' \sin(K_1 r'))^2 + z^2]^{3/2}} dr' dr \quad (8)$$

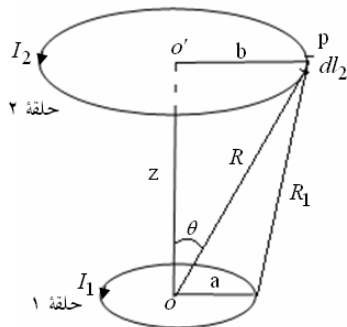
$$f_z = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} z \int_{r_1}^{r_2} \int_{r_1'}^{r_2'} \frac{(1 + K_1 K_2 r r') \cos(K_2 r - K_1 r') - (K_2 r - K_1 r') \sin(K_2 r - K_1 r')}{[(r \cos(K_2 r) - r' \cos(K_1 r'))^2 + (r \sin(K_2 r) - r' \sin(K_1 r'))^2 + z^2]^{3/2}} dr' dr \quad (9)$$

$$k = \sqrt{\frac{4ab}{(a+b)^2 + z^2}} \quad (12)$$

همچنین $K(k)$ و $E(k)$ به ترتیب انتگرالهای بیضوی نوع اول^۱ و دوم^۲ می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (13)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta \quad (14)$$



شکل ۳: دو حلقه هم مرکز حامل جریان

برای محاسبه نیروی بین سیم‌پیچ‌ها، همانند آنچه که در مرجع [۱۰] انجام شده است، می‌توان از روش مجموع نیروهای بین تک تک حلقه‌های دو سیم‌پیچ استفاده کرد. ولی استفاده از

$$F_{21} = I_2 \int_{C_2} dl_2 \times B \quad (5)$$

در رابطه فوق dl_2 ، جزء دیفرانسیل طول بر روی سیم‌پیچ ۲ می‌باشد. با جایگذاری عبارت مناسب برای dl_2 و استفاده از رابطه (۴) و انجام پاره‌ای محاسبات ساده ریاضی خواهیم داشت:

که در آنها از رابطه زیر استفاده شده است:

$$\phi = K_2 r \quad (10)$$

در رابطه فوق K_2 ، ضریب فشردگی سیم‌پیچ ۲ بوده که با توجه به میزان فشردگی سیم‌پیچ و قطر سیم به کار رفته در آن تعیین می‌شود.

۳- روش ارائه شده برای محاسبه نیروی مغناطیسی بین دو سیم‌پیچ حلزونی

در بخش قبل برای محاسبه نیروی بین سیم‌پیچ‌های حلزونی از روش مستقیم استفاده شد که منجر به معادلات (۶) تا (۹) گردید. در این بخش از روش مش‌بندی سطوح مقاطع برای محاسبه نیروی بین سیم‌پیچ‌های مذکور استفاده می‌شود. برای اینکار ابتدا بایستی نیروی بین دو حلقه هم مرکز محاسبه شود. نیروی بین دو حلقه هم مرکز با فاصله محوری z (شکل ۳)، توسط رابطه زیر داده می‌شود [۹]:

$$F = a_z \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2 z k}{2\sqrt{ab} (1 - k^2)} \right) [(1 - k^2)K(k) - (1 - \frac{1}{2}k^2)E(k)] \quad (11)$$

در رابطه فوق I_1 و I_2 به ترتیب جریان در حلقه‌های ۱ و ۲، a و b شعاع حلقه‌های ۱ و ۲، μ_0 ضریب نفوذپذیری خلأ و k ضریب ثابتی بوده و برابر است با:

۱- First Order Elliptic Integral

۲- Second Order Elliptic Integral

بیست و چهارمین کنفرانس بین‌المللی برق

$$F = \sum_{k=0}^{n_{r2}-1} \sum_{j=0}^{n_{r1}-1} f(k, j) \quad (15)$$

که در آن $f(k, j)$ با توجه به رابطه بین دو فیلمان (رابطه (۱۱))، برابر است با:

$$f(k, j) = a_z \left(\frac{\mu_0 i_1 i_2 z k'}{2\sqrt{r_k r_j} (1-k'^2)} \right) [(1-k'^2)K(k') - (1-\frac{1}{2}k'^2)E(k')] \quad (16)$$

رابطه فوق نیروی بین دو فیلمان از دو سیم‌پیچ می‌باشد که در آن جریان هر فیلمان به صورت فشرده در مرکز آن فیلمان در نظر گرفته شده و چگالی جریان کل سیم‌پیچ یکنواخت فرض شده است و i_1 و i_2 ، به ترتیب جریان هر فیلمان در سیم‌پیچ‌های ۱ و ۲ می‌باشند که از روابط زیر قابل محاسبه اند:

$$i_1 = \frac{N_1 I_1}{n_{r1}} \quad (17)$$

$$i_2 = \frac{N_2 I_2}{n_{r2}} \quad (18)$$

I_1 و I_2 در روابط فوق، به ترتیب جریان در سیم‌پیچ‌های ۱ و ۲ هستند. همچنین پارامترهای دیگر در رابطه (۱۶) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$r_k = r_{2,0} + \left(\frac{1}{2} + k\right) \left(\frac{b_2}{n_{r2}}\right) \quad (19)$$

$$r_j = r_{1,0} + \left(\frac{1}{2} + j\right) \left(\frac{b_1}{n_{r1}}\right) \quad (20)$$

$$k' = \sqrt{\frac{4r_k r_j}{(r_k + r_j)^2 + z^2}} \quad (21)$$

z در رابطه (۱۶)، فاصله مرکز به مرکز دو سیم‌پیچ می‌باشد.

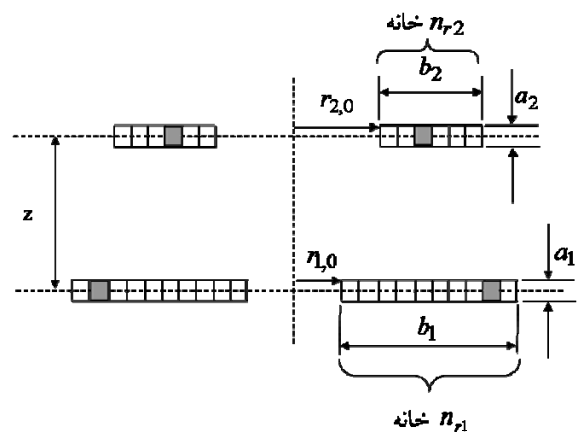
۴- نتایج محاسبات

در بخش ۲ نیروی بین دو سیم‌پیچ حلزونی که در دو صفحه مقابل هم قرار گرفته باشند را به صورت تحلیلی بدست آوردیم (رابطه (۶))؛ اگر فرض کنیم که میزان فشردگی سیم‌پیچ‌ها زیاد باشد یا به طور معادل رشد شعاعی حلقه‌ها در هر سیم‌پیچ در هر دور خیلی بیشتر از قطر سیم‌های به کار رفته نباشد، در آن صورت مقادیر نیرو در جهت‌های x و y تقریباً صفر بوده و تنها در جهت z ، مؤلفه خواهیم داشت [۹] که این مؤلفه در رابطه (۹) ملاحظه می‌شود. نیرو در این

روش مذکور مستلزم آگاهی از چیدمان دورها در هر سیم‌پیچ می‌باشد [۹]. گاهی این امکان برای سیم‌پیچ‌ها وجود نداشته و تنها از تعداد دور و ابعاد بیرونی آنها اطلاع داریم؛ بنابراین از روش مش‌بندی سطوح مقاطع برای محاسبه نیرو بین سیم‌پیچ‌ها استفاده می‌شود. با استفاده از این روش و تنها با داشتن مشخصات ظاهری سیم‌پیچ‌ها می‌توان نیروی بین آنها را محاسبه نمود.

فرض می‌کنیم که سیم‌پیچ‌های ۱ و ۲ به ترتیب با N_1 و N_2 دور در دست است. برشی از سطح مقطع سیم‌پیچ‌ها در شکل ۴ نشان داده شده است که در آن $r_{1,0}$ و $r_{2,0}$ ، به ترتیب شعاع داخلی سیم‌پیچ‌های ۱ و ۲، a_1 و a_2 ، به ترتیب ارتفاع سیم‌پیچ‌های مذکور و b_1 و b_2 ، به ترتیب ضخامت شعاعی آنها می‌باشد.

به طوری که در شکل ۴ ملاحظه می‌شود، برای محاسبه نیرو بین سیم‌پیچ‌ها سطح مقطع هر یک از آنها را به خانه‌های مختلف تقسیم می‌کنیم. به طور خاص در این شکل سیم‌پیچ ۱ به n_{r1} خانه و سیم‌پیچ ۲ به n_{r2} خانه تقسیم شده‌اند.



شکل ۴: تقسیم سیم‌پیچ‌ها به خانه‌های مختلف به منظور محاسبه نیروی بین آنها

برای محاسبه نیروی بین سیم‌پیچ‌ها، نیروی بین فیلمان‌های (در شکل ۴، هر فیلمان به صورت دو خانه در دو طرف مشخص است) مختلف حاصل از دو سیم‌پیچ را حساب کرده و با هم جمع می‌کنیم. به این ترتیب نیروی بین سیم‌پیچ‌ها از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

بیست و چهارمین کنفرانس بین‌المللی برق

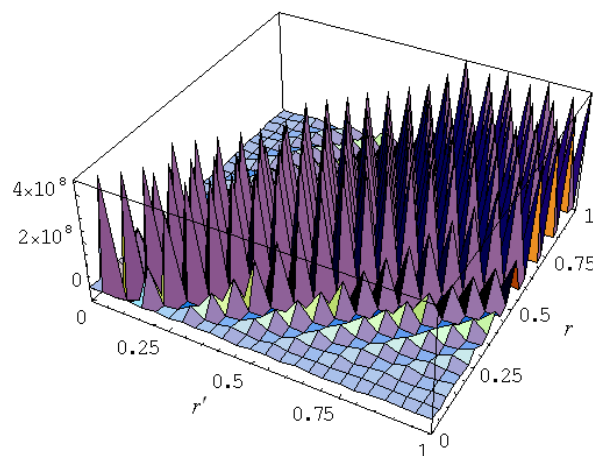
محاسبه نیروی بین دو سیم‌پیچ در رابطه (۱۵)، سطح مقطع آنها به قسمت‌های مختلف تقسیم شده است. برای بررسی تأثیر تعداد تقسیمات بر روی دقت محاسبات، نیروی بین دو سیم‌پیچ با تقسیم سطح مقطع آنها به قسمت‌های مختلف در جهت شعاعی محاسبه شده است.

نتایج این محاسبات در جدول‌های ۱ و ۲ خلاصه شده است. در این جدول‌ها نیروی بین دو سیم‌پیچ در فاصله‌های مختلف محاسبه شده است. در هر فاصله نیروی محاسبه شده از هر دو روش به ازای تعداد دور برابر ۱۰۰ برای دو سیم‌پیچ، مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. جریان هر دو سیم‌پیچ برابر ۱۰ آمپر و قطر سیم‌های به کار رفته برابر ۱ میلی‌متر می‌باشد و ضریب فشردگی برای هر دو سیم‌پیچ برابر $\frac{2\pi}{d}$ در نظر گرفته شده

است که در آن d قطر سیمها در هر دو سیم‌پیچ می‌باشد و آن بدین معنی است که به ازای هر دور سیم‌پیچ یا به ازای تغییر 2π رادیان در مقدار متغیر ϕ در مختصات استوانه‌ای، مقدار متغیر r (رشد شعاعی سیم‌پیچ‌ها) به اندازه قطر سیم‌های به کار رفته در سیم‌پیچ‌ها تغییر می‌کند. جدول ۱، نتایج را برای حالتی نشان می‌دهد که در آن شعاع داخلی و ضریب فشردگی برای هر دو سیم‌پیچ به ترتیب برابر ۰ و $\frac{2\pi}{0.001}$ می‌باشند. در

ستون سوم جدول ۱ سطح مقطع هر دو سیم‌پیچ به ۱۰۰ قسمت تقسیم شده است. در این حالت، نتایج حاصل از دو روش تا ۴ رقم اعشار مساوی بوده و در نتیجه خطای نیرو برابر صفر می‌باشد. در ستون بعدی، هر دو سیم‌پیچ در جهت شعاعی به ۵۰ قسمت تقسیم شده‌اند. در این حالت خطای نیرو برابر ۰/۰۱۵٪ بوده ولی زمان محاسبات یک چهارم حال قبلی شده است. با کاهش تعداد تقسیمات، زمان محاسبات کاهش یافته ولی خطا افزایش می‌یابد. در نتیجه به ازای خطای مشخص می‌توان با کاهش تعداد تقسیمات در سطح مقطع سیم‌پیچ‌ها زمان محاسبات را کاهش داد. در سطرهای بعدی جدول ۱، محاسبات نیرو برای فواصل دیگر بین دو سیم‌پیچ انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد که هر چه فاصله بین دو سیم‌پیچ بیشتر باشد، خطای نیروی محاسبه شده بین

رابطه، نیروی وارد شده به سیم‌پیچ بالایی (سیم‌پیچ ۲) از طرف سیم‌پیچ پایینی (سیم‌پیچ ۱) در شکل ۱ می‌باشد؛



شکل ۵: تابع زیر انتگرال در رابطه نیرو با تغییر r و r'

هر چند در بدست آوردن نیرو در رابطه (۹)، از روابط دقیق تحلیلی استفاده شده است ولی انتگرال این تابع، حل تحلیلی نداشته و بایستی برای حل آن از تکنیکهای عددی انتگرال‌گیری استفاده نماییم. اگر تابع زیر انتگرال در این رابطه را در نظر بگیریم مشاهده می‌شود که این تابع دارای شبه قطبهایی است که به مقادیر ضرایب K_1 و K_2 بستگی دارند. منحنی تابع زیر انتگرال نسبت به متغیرهای r و r' در شکل ۵ رسم شده است. در این شکل، تابع زیر انتگرال در رابطه (۱۲) برای تغییرات r و r' از صفر تا ۱ رسم شده است؛ به طوری که ملاحظه می‌شود با افزایش مقادیر r و r' از صفر، مقدار تابع زیر انتگرال شروع به ایجاد قله‌های (نقاط شبه قطب) نوک تیز می‌کند. با کمی دقت می‌توان دریافت که انتگرال‌گیری از این سطوح کاری دشوار می‌باشد؛ چرا که برای دقت‌های بالا لازم است که تعداد تکرار در انتگرال‌گیری عددی را به شدت بالا ببریم و این مستلزم صرف زمان‌های طولانی برای حل این گونه مسائل می‌باشد.

در این قسمت نتایج حاصل از محاسبه نیرو با استفاده از روش مستقیم یعنی رابطه (۹) و استفاده از روش مش‌بندی سطوح مقاطع را مقایسه می‌کنیم؛ برای محاسبه انتگرال در رابطه (۹) از روش سیمپسون و فوی استفاده می‌شود. برای

کوچکترین آنها) می‌باشند؛ برای مقایسه بهتر نتایج محاسبات حاصل از دو روش، دقت محاسبات را 10^{-16} انتخاب کرده‌ایم. اگر زمان محاسبات در روش مستقیم را با روش ارائه شده، مقایسه نماییم ذکر تنها یک مورد کافی است که زمان لازم برای محاسبات از روش سیمپسون و فقی برای حالت 100 دوری در جدول ۳ و برای دقت 10^{-4} ، تقریباً 28000 برابر حالتی است که از روش ارائه شده استفاده نماییم. به طوری که ملاحظه می‌شود نتایج به دست آمده نیز تا چهار رقم اعشار یکسان می‌باشد. نکته دیگری که از جدول ۳ ملاحظه می‌شود این است که با افزایش فاصله دو صفحه از یکدیگر، خطای محاسبات زیاد شده و این امر نشان می‌دهد که در این حالت، روش ارائه شده، نمی‌تواند تقریب خوبی از نیرو ارائه کند.

در جدول ۴، مقایسه دو روش محاسبه نیرو برای حالتی انجام شده که در آن شعاع داخلی دو سیم‌پیچ برابر 1 سانتی‌متر می‌باشد یعنی سیم‌پیچ‌ها از $r=1\text{cm}$ شروع به پیچیده شدن کرده‌اند. به طوری که نتایج جدول نیز بیان‌گر آن است، در این حالت خطاها نسبت به جدول ۳ کمتر شده‌اند. برای مثال درصد خطای نیرو برای سیم‌پیچ‌های 1 دوری با فاصله دو صفحه برابر 10cm ، از مقدار 100 در جدول ۱ به مقدار $1/5$ در جدول ۴ کاهش یافته است. این خطای کم برای تعداد دورهای پایین با افزایش تعداد دورها به سرعت کم شده و نهایتاً صفر می‌شود.

با توجه به نتایج جدول‌های ۳ و ۴، در حالت کلی می‌توان گفت که برای تعداد دورهای بالاتر از 10 دور در هر سیم‌پیچ، استفاده از روش پیشنهاد شده در این مقاله، تقریب‌های خوبی ارائه می‌کند؛ این در حالی است که محاسبات این حلقه‌ها به مراتب راحت‌تر از محاسبات به روش مستقیم و استفاده از رابطه (۹) بوده و از نظر زمان محاسبات نیز در مدت زمان کمتری صورت می‌گیرد.

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن ضرایب فشردگی سیم‌پیچ‌ها در دو صفحه، کوچک‌تر از حالت قبل باشد؛ یعنی به ازای هر دور سیم‌پیچ یا تغییر به اندازه 2π در مقدار متغیر ϕ ، رشد r بیشتر از قطر سیم‌های به کار رفته باشد؛ به عنوان نمونه فرض می‌کنیم رشد r برابر 5 میلی‌متر باشد، در این

آنها کاهش می‌یابد. به عبارتی، تقسیم سطح مقطع سیم‌پیچ‌ها خطای کمتری را در فواصل دور بین دو سیم‌پیچ تولید می‌کند. در نتیجه به ازای یک خطای مشخص، در فواصل دور تعداد تقسیمات کمتری لازم است. خطای نسبی از رابطه زیر محاسبه شده است:

$$\% \text{ error} = \frac{f_d - f_p}{f_d} \times 100 \quad (22)$$

که در آن f_p ، نیروی محاسبه شده از روش ارائه شده بوده و f_d ، نیرویی است که از روش مستقیم بدست آمده است. در جدول ۲، همان محاسبات مربوط به جدول ۱ انجام شده ولی در این جدول شعاع داخلی سیم‌پیچ‌های 1 و 2 برابر 1 سانتی‌متر می‌باشند. به طوری که ملاحظه می‌شود، برای تعداد تقسیمات بزرگ‌تر از 10 ، خطای محاسبات قابل چشم‌پوشی می‌باشد. بنابراین با توجه به نتایج بدست آمده، بدون داشتن خطای زیاد می‌توان تعداد تقسیمات را به منظور کاهش زمان محاسبات کاهش داد.

تغییر علامت در درصد خطای نیروی محاسبه شده در جدول‌های 1 و 2 را باید در تغییر شعاع قسمت‌هایی از سیم‌پیچ‌ها که در محاسبات دخیل هستند، جستجو کرد. تغییر شعاع سیم‌پیچ‌ها موجب تغییر مقدار و محل پیک نیرو بر روی محور فاصله در منحنی نیرو-فاصله می‌شود.

در جدول‌های 3 و 4 نتایج نیروهای محاسبه شده از هر دو روش به ازای مقادیر مختلف تعداد دور و فاصله سیم‌پیچ‌ها، مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. در جدول‌های مذکور، جریان سیم‌پیچ‌ها و قطر سیم‌های به کار رفته مشابه حالت قبل می‌باشد. برای مقایسه بهتر نتایج حاصل از روش ارائه شده و روش مستقیم در جدول‌های 3 و 4 ، تعداد تقسیمات برابر تعداد دور سیم‌پیچ‌ها در نظر گرفته شده است. در جدول 1 فرض شده که دو سیم‌پیچ از نقطه $(0,0)$ شروع به رشد کرده‌اند. با مقایسه نتایج به دست آمده از دو روش در این جدول مشاهده می‌شود که برای تعداد دورهای کم خطای زیاد بوده ولی با افزایش تعداد دور، خطا به تدریج کم شده و در حالتی که تعداد دور به 100 می‌رسد، خطا به صفر کاهش می‌یابد. در محاسبات جدول‌های 3 و 4 دقت محاسبات با توجه به مقدار عددی نتایج تنظیم شده است. به عنوان نمونه برای ستون اول از جدول 3 اعداد محاسبه شده در رنج 10^{-16}))

بیست و چهارمین کنفرانس بین‌المللی برق

مقادیر درصد خطای نسبی نیروی محاسبه شده کمتر از مقادیر نظیر آن در جدول ۳ می‌باشد (هر چند که مقدار خطای مطلق افزایش یافته است). ابتدا به نظر می‌رسید با کاهش ضریب فشردگی سیم‌پیچ‌ها، خطای محاسبات افزایش یابد ولی این چنین نبوده و با کاهش فشردگی سیم‌پیچ‌ها، درصد خطای نسبی محاسبات با استفاده از روش ارائه شده کاهش یافته است؛ این موضوع برای ضرایب فشردگی کوچکتر از این نیز برقرار است [۹].

صورت ضرایب فشردگی برای دو سیم‌پیچ به صورت $K_1 = K_2 = \frac{2\pi}{0.005}$ خواهد بود. نتایج محاسبات نیرو با شرایط فوق و از دو روش مستقیم و ارائه شده، در جدول ۵ آورده شده است. در این جدول نیز مثل جدول‌های قبل جریان سیم‌پیچ‌ها برابر ۱۰ آمپر می‌باشد. مقایسه جدول‌های ۳ و ۵ نتایج جالبی ارائه می‌کند؛ در جدول ۵ نیز روند افزایش و کاهش خطا با افزایش فاصله دو سیم‌پیچ و تعداد دور آن، مشابه جدول ۳ می‌باشد ولی در این حالت

جدول ۱: مقایسه محاسبات نیرو بین سیم‌پیچ‌ها با مش‌بندی‌های مختلف

(شعاع داخلی و ضرایب فشردگی سیم‌پیچ‌ها به ترتیب برابر ۰ و $2\pi/0.001$ می‌باشند)

۲	۵	۱۰	۱۰	۵۰	۱۰۰	تعداد تقسیمات سیم‌پیچ ۱	z=۱ cm (روش مستقیم: ۱/۳۶۵۳ N)
۲	۵	۱۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	تعداد تقسیمات سیم‌پیچ ۲	
۳/۰۴۲۲	۱/۵۸۳۴	۱/۳۸۲۸	۱/۳۷۰۲	۱/۳۶۵۵	۱/۳۶۵۳	نیرو (N)	
-۱۲۲/۸۲	-۱۵/۹۷	-۱/۲۸	-۰/۳۶	-۰/۰۱۵	۰	خطای نیرو (%)	
۲	۵	۱۰	۱۰	۵۰	۱۰۰	تعداد تقسیمات سیم‌پیچ ۱	z=۵ cm (روش مستقیم: ۰/۴۴۸۱ N)
۲	۵	۱۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	تعداد تقسیمات سیم‌پیچ ۲	
۰/۴۷۶۹	۰/۴۵۰۴	۰/۴۴۸۶	۰/۴۴۸۴	۰/۴۴۸۱	۰/۴۴۸۱	نیرو (N)	
-۶/۴۲	-۰/۵۱	-۰/۱۱۲	-۰/۰۶۷	۰	۰	خطای نیرو (%)	
۲	۵	۱۰	۱۰	۵۰	۱۰۰	تعداد تقسیمات سیم‌پیچ ۱	z=۱۰ cm (روش مستقیم: ۰/۱۴۰۳ N)
۲	۵	۱۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	تعداد تقسیمات سیم‌پیچ ۲	
۰/۱۳۹۰	۰/۱۴۰۰	۰/۱۴۰۲	۰/۱۴۰۳	۰/۱۴۰۳	۰/۱۴۰۳	نیرو (N)	
+۰/۹۳	+۰/۲۱	+۰/۰۷	۰	۰	۰	خطای نیرو (%)	
$1/2 \times 10^{-6}$	$7/5 \times 10^{-6}$	3×10^{-5}	$1/5 \times 10^{-4}$	$7/5 \times 10^{-4}$	3×10^{-3}	نسبت زمان محاسبه به زمان محاسبه روش مستقیم	

جدول ۲: مقایسه محاسبات نیرو بین سیم‌پیچ‌ها با مش‌بندی‌های مختلف

(شعاع داخلی و ضرایب فشردگی سیم‌پیچ‌ها به ترتیب برابر ۱ cm و $2\pi/0.001$ می‌باشند)

۲	۵	۱۰	۱۰	۵۰	۱۰۰	تعداد تقسیمات سیم‌پیچ ۱	z=۱ cm (روش مستقیم: ۱/۶۹۰۹ N)
۲	۵	۱۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	تعداد تقسیمات سیم‌پیچ ۲	
۳/۷۱۹۲	۱/۹۵۷۵	۱/۷۱۳۴	۱/۶۹۷۵	۱/۶۹۱۲	۱/۶۹۰۹	نیرو (N)	
-۱۱۹/۹۵	-۱۵/۷۷	-۱/۳۳	-۰/۳۹	-۰/۰۱۸	۰	خطای نیرو (%)	
۲	۵	۱۰	۱۰	۵۰	۱۰۰	تعداد تقسیمات سیم‌پیچ ۱	z=۵ cm (روش مستقیم: ۰/۶۰۷۰ N)
۲	۵	۱۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	تعداد تقسیمات سیم‌پیچ ۲	
۰/۶۵۵۹	۰/۶۱۲۰	۰/۶۰۸۲	۰/۶۰۷۶	۰/۶۰۷۱	۰/۶۰۷۰	نیرو (N)	
-۸/۰۶	-۰/۸۲	-۰/۲	-۰/۱۰	-۰/۰۱۶	۰	خطای نیرو (%)	
۲	۵	۱۰	۱۰	۵۰	۱۰۰	تعداد تقسیمات سیم‌پیچ ۱	z=۱۰ cm (روش مستقیم: ۰/۲۰۶۱ N)
۲	۵	۱۰	۵۰	۵۰	۱۰۰	تعداد تقسیمات سیم‌پیچ ۲	
۰/۲۰۹۲	۰/۲۰۶۴	۰/۲۰۶۲	۰/۲۰۶۱	۰/۲۰۶۱	۰/۲۰۶۱	نیرو (N)	
-۱/۵۰	-۰/۱۵	-۰/۰۵	۰	۰	۰	خطای نیرو (%)	
$1/2 \times 10^{-6}$	$7/5 \times 10^{-6}$	3×10^{-5}	$1/5 \times 10^{-4}$	$7/5 \times 10^{-4}$	3×10^{-3}	نسبت زمان محاسبه به زمان محاسبه روش مستقیم	

بیست و چهارمین کنفرانس بین‌المللی برق

جدول ۳: مقایسه روشهای محاسبه نیرو بین دو سیم پیچ حلزونی (شعاع داخلی سیم پیچ برابر ۰ و ضرایب فشردگی سیم پیچها برابر $\frac{2\pi}{0.001}$)

تعداد دور یا حلقه در هر صفحه	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	
روش مستقیم (N)	$1/0.453 \times 10^{-7}$	$7/4636 \times 10^{-7}$	$5/9312 \times 10^{-5}$	0.1409×10^{-2}	$1/3653$	z=1 cm
روش ارائه شده (N)	$3/6553 \times 10^{-9}$	$3/3540 \times 10^{-7}$	$5/6863 \times 10^{-5}$	0.1402×10^{-2}	$1/3653$	
در صد خطا	۹۶/۵	۵۵/۱	۱/۴	۰/۵	۰/۰	
روش مستقیم (N)	$4/0.074 \times 10^{-9}$	$1/6615 \times 10^{-8}$	$2/5756 \times 10^{-7}$	$9/7620 \times 10^{-6}$	$0/4481$	z=5 cm
روش ارائه شده (N)	$5/9188 \times 10^{-12}$	$5/8976 \times 10^{-11}$	$1/5662 \times 10^{-7}$	$9/3511 \times 10^{-6}$	$0/4481$	
در صد خطا	۹۹/۸	۹۶/۵	۳۹/۲	۴/۲	۰/۰	
روش مستقیم (N)	$1/0.005 \times 10^{-9}$	$4/0.386 \times 10^{-9}$	$3/5.066 \times 10^{-8}$	$7/3663 \times 10^{-7}$	$0/1407$	cm z=10
روش ارائه شده (N)	$3/7.006 \times 10^{-13}$	$3/6973 \times 10^{-11}$	$1/0.003 \times 10^{-8}$	$6/3569 \times 10^{-7}$	$0/1403$	
در صد خطا	۱۰۰	۹۹/۱	۷۱/۵	۱۳/۷	۰/۲۱	

* دقت محاسبات در روش انتگرال گیری عددی برای حلقه‌های ۱ تا ۱۰۰ دوری به ترتیب برابر 0.5×10^{-16} ، 0.5×10^{-15} ، 0.5×10^{-12} ، 0.5×10^{-11} ، 0.5×10^{-7} و 0.5×10^{-5} می‌باشد.

جدول ۴: مقایسه روشهای محاسبه نیرو بین دو سیم پیچ حلزونی (شعاع داخلی سیم پیچ برابر ۱ cm و ضرایب فشردگی سیم پیچها برابر $\frac{2\pi}{0.001}$)

تعداد دور یا حلقه در هر صفحه	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	
روش مستقیم (N)	$7/8358 \times 10^{-5}$	$3/3733 \times 10^{-4}$	$2/4909 \times 10^{-3}$	$1/1712 \times 10^{-2}$	$1/6909$	z=1 cm
روش ارائه شده (N)	$7/8384 \times 10^{-5}$	$3/3745 \times 10^{-4}$	$2/4916 \times 10^{-3}$	$1/1714 \times 10^{-2}$	$1/6909$	
در صد خطا	$-3/3 \times 10^{-2}$	$-3/6 \times 10^{-2}$	$-2/8 \times 10^{-2}$	$-1/7 \times 10^{-2}$	۰/۰	
روش مستقیم (N)	$9/4323 \times 10^{-7}$	$4/4683 \times 10^{-6}$	$4/4231 \times 10^{-5}$	$3/3155 \times 10^{-4}$	$0/6070$	z=5 cm
روش ارائه شده (N)	$9/3905 \times 10^{-7}$	$4/4517 \times 10^{-6}$	$4/4129 \times 10^{-5}$	$3/3117 \times 10^{-4}$	$0/6070$	
در صد خطا	۰/۴۴	۰/۳۷	۰/۲۳	۰/۱۱	۰/۰	
روش مستقیم (N)	$6/9227 \times 10^{-8}$	$3/3218 \times 10^{-7}$	$3/4467 \times 10^{-6}$	$2/8509 \times 10^{-5}$	$0/2061$	z=10 cm
روش ارائه شده (N)	$6/8194 \times 10^{-8}$	$3/2804 \times 10^{-7}$	$3/4207 \times 10^{-6}$	$2/8144 \times 10^{-5}$	$0/2061$	
در صد خطا	۱/۵	۱/۳	۰/۷۶	۰/۳۷	۰/۰	

* دقت محاسبات در روش انتگرال گیری عددی برای حلقه‌های ۱ تا ۱۰۰ دوری به ترتیب برابر 0.5×10^{-12} ، 0.5×10^{-11} ، 0.5×10^{-10} ، 0.5×10^{-10} ، 0.5×10^{-10} و 0.5×10^{-7} می‌باشد.

جدول ۵: مقایسه روشهای محاسبه نیرو بین دو سیم پیچ حلزونی (شعاع داخلی سیم پیچ برابر ۰ و ضرایب فشردگی سیم پیچها برابر $\frac{2\pi}{0.005}$)

تعداد دور یا حلقه در هر صفحه	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	
روش مستقیم (N)	$4/2719 \times 10^{-6}$	$6/2280 \times 10^{-5}$	$1/4744 \times 10^{-3}$	$1/0.132 \times 10^{-2}$	$1/8028$	z=1 cm
روش ارائه شده (N)	$1/7467 \times 10^{-6}$	$5/5591 \times 10^{-5}$	$1/4611 \times 10^{-3}$	$1/0.114 \times 10^{-2}$	$1/8028$	
در صد خطا	۵۹/۱	۱۰/۷	۰/۹	۰/۲	۰/۰	
روش مستقیم (N)	$1/0.453 \times 10^{-7}$	$7/4636 \times 10^{-7}$	$5/9312 \times 10^{-5}$	$1/4089 \times 10^{-3}$	$1/3653$	z=5 cm
روش ارائه شده (N)	$3/6553 \times 10^{-9}$	$3/3540 \times 10^{-7}$	$5/6863 \times 10^{-5}$	$1/4023 \times 10^{-3}$	$1/3653$	
در صد خطا	۹۶/۵	۵۵/۱	۱/۴	۰/۴۷	۰/۰	
روش مستقیم (N)	$2/5288 \times 10^{-8}$	$1/2347 \times 10^{-7}$	$5/9584 \times 10^{-6}$	$2/3166 \times 10^{-4}$	$1/0081$	z=10 cm
روش ارائه شده (N)	$2/3060 \times 10^{-10}$	$2/2553 \times 10^{-8}$	$5/3127 \times 10^{-6}$	$2/2922 \times 10^{-4}$	$1/0077$	
در صد خطا	۹۸/۷	۸۱/۷	۱۰/۸	۱/۱	۰/۰۴	

* دقت محاسبات در روش انتگرال گیری عددی برای حلقه‌های ۱ تا ۱۰۰ دوری به ترتیب برابر 0.5×10^{-16} ، 0.5×10^{-15} ، 0.5×10^{-12} ، 0.5×10^{-11} ، 0.5×10^{-7} و 0.5×10^{-5} می‌باشد.

۵- نتایج آزمایشگاهی

برای ارزیابی میزان دقت روش ارائه شده در محاسبه نیروی بین دو سیم‌پیچ و محاسبات حاصل از آن، دو سیم‌پیچ با شعاع‌های مختلف و به صورت دقیق با مشخصات جدول ۶ در آزمایشگاه ساخته شد.

برای اندازه‌گیری دقیق نیروهای جاذبه و دافعه بین سیم‌پیچ‌ها، آزمایشی به صورت آنچه که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، ترتیب داده شد. در این شکل یکی از سیم‌پیچ‌ها بر روی فیبر استخوانی که ضریب نفوذ پذیری آن مثل هواست، قرار داده شده و سیم‌پیچ دیگر از طریق چهار قطعه طناب و صفحه‌ای از فیبر استخوانی به یک نیرو سنج دیجیتال وصل شده است. به این ترتیب با اعمال جریان به مدار شامل دو سیم‌پیچ، نیروی وارد شده به سیم‌پیچ بالایی که برابر نیروی وارده به سیم‌پیچ پایینی می‌باشد توسط نیروسنج به طور دقیق اندازه‌گیری می‌شود.

در جدول ۷، نتایج محاسبات به ازای فواصل مختلف، همراه با مقایسه آنها با نتایج آزمایشگاهی آورده شده است. در محاسبات این جدول با توجه به زیاد بودن تعداد دور سیم‌پیچ‌ها و شعاع داخلی آنها، از روش جدید با تعداد تقسیمات ۲۵ استفاده شده است. با توجه به نتایج و توضیحات بخش قبل، استفاده از این روش در این مورد خطای قابل‌ذکری را ایجاد نمی‌کند. به طوری که از جدول ۷ مشاهده می‌شود نتایج حاصل از اندازه‌گیری نیرو با نتایج محاسبات مطابقت خوبی داشته و دقت این روش را تأیید می‌کنند.

جدول ۶: مشخصات سیم‌پیچ‌های حلزونی ساخته شده

قطر سیم‌های به کار رفته (mm)	شعاع داخلی (cm)	تعداد دور	
۱/۶	۲/۱۵	۵۴	سیم‌پیچ ۱
۱/۶	۲/۰	۵۵	سیم‌پیچ ۲

۶- نتیجه‌گیری

برای محاسبه نیرو بین سیم‌پیچ‌های حلزونی، غالباً از روش مستقیم استفاده می‌شود. در این روش به انتگرال‌هایی برخورد

می‌کنیم که دارای حل تحلیلی نبوده و حل عددی آنها نیز با توجه به ناهموار بودن سطح توابع زیر انتگرال، قدری مشکل و زمان‌بر می‌باشد؛ برای غلبه بر این مشکل در این مقاله روشی جدید مبتنی بر فیلمان جریان برای محاسبه نیروهای مغناطیسی بین سیم‌پیچ‌های حلزونی ارائه شد که از نظر محاسباتی ساده بوده و زمان محاسبات را نیز کاهش می‌دهد. اثر تعداد تقسیمات سطح مقطع سیم‌پیچ‌ها بر روی دقت محاسبات مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که برای کاهش زمان محاسبات، می‌توان تعداد تقسیمات را کاهش داد بدون اینکه خطای زیادی در محاسبات حاصل شود. با توجه به نتایج بدست آمده، خطای محاسبات حاصل از روش ارائه شده برای تعداد دورهای بیشتر از ۱۰ ناچیز بوده و می‌توان در محاسبات از آنها استفاده نمود. این خطاها با افزایش شعاع داخلی سیم‌پیچ‌های حلزونی کمتر شده و در دورهای کم نیز دارای مقادیر قابل قبولی می‌باشند. با توجه به اندازه‌گیری‌هایی که بر روی سیم‌پیچ‌های ساخته شده انجام شد، نتایج محاسبات بدست آمده با نتایج آزمایشگاهی مورد تأیید قرار گرفت.



شکل ۸: اندازه‌گیری نیروی مغناطیسی بین دو سیم‌پیچ

جدول ۷: نتایج آزمایشگاهی و مقایسه آنها با نتایج محاسبات به روش حلقه‌های جایگزین

۱۲	۱۰	۸	۶	۴	جریان سیم‌پیچ‌ها (A)	
۰/۸۸۲۹	۰/۶۱۸۰	۰/۳۸۲۶	۰/۲۲۵۶	۰/۰۹۸۱	نیروی اندازه‌گیری شده (N)	z=۱ cm
۰/۸۸۳۲	۰/۶۱۳۳	۰/۳۹۲۵	۰/۲۲۰۸	۰/۰۹۸۱	نیروی محاسبه شده (N)	
۰/۳۲۳۷	۰/۲۱۵۸	۰/۱۳۷۳	۰/۰۸۸۳	۰/۰۳۹۲	نیروی اندازه‌گیری شده (N)	z=۵ cm
۰/۳۱۴۲	۰/۲۱۸۲	۰/۱۳۹۷	۰/۰۷۸۶	۰/۰۳۴۹	نیروی محاسبه شده (N)	
۰/۱۰۷۹	۰/۰۷۸۵	۰/۰۴۹۱	۰/۰۲۹۴	۰/۰۱۹۶	نیروی اندازه‌گیری شده (N)	cm z=۱۰
۰/۱۰۵۶	۰/۰۷۳۳	۰/۰۴۶۹	۰/۰۲۶۴	۰/۰۱۱۷	نیروی محاسبه شده (N)	

مراجع

metal sheets", IEEE Trans. on Mag., Vol. 36, No. 4, July 2000.

[۹] عباس شیری، "محاسبه نیروهای مغناطیسی بین سیم‌پیچ‌های حامل جریان در دو صفحه مسطح"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه علم و صنعت ایران، پاییز ۱۳۸۵.

[۱۰] عباس شیری و عباس شولایی، "محاسبه نیروهای مغناطیسی بین سیم‌پیچ‌های حلزونی مسطح"، پانزدهمین کنفرانس مهندسی برق ایران، تهران، اردیبهشت ۱۳۸۶.

[۱۱] د. ک. چنگ، "الکترومغناطیس میدان و موج"، ترجمه پ. ج. مارالانی و م. قوامی، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ ششم، پاییز ۱۳۷۹.

[12] Spiegel, M. R., "Schaum's Outline Series: Mathematical Handbook of Formulas and Tables", McGraw-Hill, 1968.

[1] X. Ding, K. Kuribayashi and T. Hashida, "Development of a new type tactile sensor using micro electromagnetic coil for human robot", IEEE International Symp. on Micromechatronics and Human Science, October 2000.

[2] S. Atluri and M. Ghovanloo, "A wideband power-efficient inductive wireless link for implantable microelectronic devices using multiple carriers", IEEE International Symp. on Circuits and Systems (ISCAS), May 2006.

[3] K. Kawabe, H. Koyama and K. Shirae, "Planar Inductor", IEEE Trans. on Mag., Vol. 20, No. 5, Sept. 1984.

[4] T. Sato, M. Hasegawa, T. Mizoguchi and M. Sahashi, "Study of high power planar inductor", IEEE Trans. on Mag., Vol. 27, No. 6, Nov. 1991.

[5] Y. Fukuda, T. Inoue, T. Mizoguchi, S. Yatabe and Y. Tachi, "Planar inductor with ferrite layers for DC-DC converter", IEEE Trans. on Mag., Vol. 39, No. 4, July 2003.

[6] I. Sasada, T. Yamaguchi, K. Harada and Y. Notohara, "Planar inductors using NiZn ferrite thin plates and the application to high-frequency DC-DC converters", IEEE Trans. on Mag., Vol. 29, No. 6, Nov. 1993.

[7] I. Kawase, T. Sato, K. Yamasawa and Y. Miura, "A planar inductor using Mn-Zn ferrite/polyimide composite thick film for low-voltage and large-current DC-DC converter", IEEE Trans. on Mag., Vol. 41, No. 10, Oct. 2005.

[8] A. Meriched, M. Feliachi and H. Mohellebi, "Electromagnetic forming of thin